

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.108 (2006 – 2ο)

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2(x-2)$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$. Προφανώς για κάθε $x \in [2, +\infty)$ είναι $f'(x) \geq 0$ (με την ισότητα να ισχύει μεμονωμένα μόνο για $x = 2$). Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως είναι και 1-1

- β) Αφού η f είναι 1-1 θα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . Για να βρούμε τον τύπο της έχουμε

$$y = 2 + (x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 = y-2 \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{y-2} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y-2}$$

$$\stackrel{x \geq 2}{\Rightarrow} x = 2 + \sqrt{y-2}$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση έχει τύπο $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$

- γ) i) Έχουμε

$$f(x) = x \Rightarrow 2 + (x-2)^2 = x \Rightarrow 2 + x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5-1}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{5+1}{2} \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Οπότε τα κοινά σημεία της f (και της f^{-1}) με την $y = x$ είναι τα $A(2,2)$ και $B(3,3)$

- ii) Το ζητούμενο εμβαδό λόγω συμμετρίας θα είναι διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στην γραφική παράσταση της f και της ευθείας $y = x$. Οπότε

$$\begin{aligned} E &= 2 \int_2^3 |f(x) - x| dx = 2 \int_2^3 |2 + (x-2)^2 - x| dx = 2 \int_2^3 |2 + x^2 - 4x + 4 - x| dx = \\ &= 2 \int_2^3 |x^2 - 5x + 6| dx \stackrel{\substack{\text{για κάθε } x \in [2,3] \\ x^2 - 5x + 6 < 0}}{=} 2 \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx = 2 \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x \right]_2^3 = \\ &= 2 \left[\left(-\frac{3^3}{3} + \frac{5 \cdot 3^2}{2} - 6 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} - 6 \cdot 2 \right) \right] = \\ &= 2 \left[\left(-\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 18 \right) - \left(-\frac{8}{3} + \frac{10}{2} - 12 \right) \right] = 2 \left[-27 + \frac{45}{2} - \left(-\frac{8}{3} + 10 - 12 \right) \right] \\ &= 2 \left[-27 + \frac{45}{2} + \frac{8}{3} + 2 \right] = -50 + 45 + \frac{16}{3} = -5 + \frac{16}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$