

# Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

## ΘΕΜΑ 36.107 (2005 – 3ο)

α) Η  $f$  είναι ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  και παραγωγίσιμη σε αυτό ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  $f'(x) = e^{\lambda x} \cdot \lambda \Rightarrow f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , που σημαίνει ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα

β) Έστω ότι η εφαπτόμενη η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων εφάπτεται στο σημείο  $(x_0, f(x_0))$ .

$$\text{Επομένως έχει εξίσωση } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1)$$

Επειδή όμως η εφαπτόμενη αυτή διέρχεται από το σημείο  $(0, 0)$ , θα πρέπει σημείο  $(0, 0)$  να ικανοποιεί την εξίσωση (1)

Επομένως θα πρέπει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Rightarrow -f(x_0) = -\lambda e^{\lambda x_0} x_0 \Rightarrow f(x_0) = \lambda e^{\lambda x_0} x_0 \Rightarrow -1 = -\lambda x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$$

Οπότε

$$(1) \Rightarrow y - f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow y - e = \lambda e\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow y - e = \lambda e x - e \Rightarrow y = \lambda e x$$

$$\text{Το σημείο επαφής έχει συντεταγμένες } M\left(\frac{1}{\lambda}, f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$$

γ) Είναι  $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \Rightarrow f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και άρα η  $f$  είναι κυρτή. Αυτό σημαίνει ότι βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη της (εκτός από το σημείο επαφής). Άρα ισχύει ότι  $f(x) \geq \lambda e x$  (με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής)

Έτσι το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} |f(x) - \lambda e x| dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - \lambda e x) dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda e x) dx = \left[ \frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \frac{\lambda e x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e}{\lambda} - \frac{\lambda e}{2} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 - \left( \frac{e^{\lambda \cdot 0}}{\lambda} - \frac{\lambda e \cdot 0^2}{2} \right) = \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}$$

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \cdot \frac{e-2}{2}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\lambda \cdot \frac{e-2}{2}}{\lambda}}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \frac{e-2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e-2}{2} \cdot \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}} = \frac{e-2}{2} \cdot (+\infty) = +\infty$$

διότι

$$\left. \begin{aligned}
 -1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 &\Rightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Rightarrow \overset{\lambda \rightarrow +\infty}{\Rightarrow \lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} \leq \frac{3}{\lambda} \\
 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{3}{\lambda} = 0
 \end{aligned} \right\} \overset{\text{κριτήριο παρεμβολής}}{\Rightarrow} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$$

$$\text{Και επειδή } \frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda} > 0 \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{2 + \eta\mu\lambda}{\lambda}} = +\infty$$