

α) Έχουμε ότι η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) \Rightarrow g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)]$

Οπότε σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει

ένα τουλάχιστον $\xi \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \stackrel{g'(x) = e^x [f(x) + f'(x)]}{\Rightarrow} e^\xi [f(\xi) + f'(\xi)] = 0 \stackrel{e^\xi \neq 0}{\Rightarrow} f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$$

β) Είναι $g(x) = e^x f(x) \Rightarrow g(x) = e^x (2x^2 - 3x)$. Επομένως

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 g(x) dx = \int_{\alpha}^0 e^x (2x^2 - 3x) dx = \int_{\alpha}^0 (e^x)' (2x^2 - 3x) dx \quad \text{παραγοντική ολοκλήρωση} \\ &= \left[e^x (2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x (2x^2 - 3x)' dx = \\ &= e^0 (2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0) - e^{\alpha} (2 \cdot \alpha^2 - 3\alpha) - \int_{\alpha}^0 e^x (4x - 3) dx = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - \int_{\alpha}^0 (e^x)' (4x - 3) dx \quad \text{παραγοντική ολοκλήρωση} \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - \left[\left[e^x (4x - 3) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x (4x - 3)' dx \right] = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) - \left[e^0 (4 \cdot 0 - 3) - e^{\alpha} (4 \cdot \alpha - 3) - \int_{\alpha}^0 4e^x dx \right] = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + e^{\alpha} (4\alpha - 3) + \left[4e^x \right]_{\alpha}^0 = \\ &= -e^{\alpha} (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + e^{\alpha} (4\alpha - 3) + 4e^0 - 4e^{\alpha} = \\ &= e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 3\alpha + 4\alpha - 3 - 4) + 3 + 4 = e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7 \end{aligned}$$

$$\gamma) \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left[e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7 \right] = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} 7 =$$

$$= 7 + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} 7 + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} 7 + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4}{e^{-\alpha}} = 7 - \frac{4}{+\infty} = 7 - 0 = 7$$