

α) Έστω $\gamma < \delta$. Τότε η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \delta]$

$$f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (γ, δ) άρα και στο διάστημα (α, β)

β) Έστω $\gamma < \delta$ και $f(\gamma) < 0$. Τότε θα είναι $\alpha < \gamma < x_0 < \delta < \beta$ και $f(\delta) > 0$

Έχουμε ότι η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$ και στο $[\gamma, x_0]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, γ) και στο (γ, x_0)

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει

$$x_1 \in (\alpha, \gamma), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \stackrel{f(\alpha)=0}{=} \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} \stackrel{f(\gamma)<0}{\Rightarrow} f'(x_1) < 0$$

και

$$x_2 \in (\gamma, x_0), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_2) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} \stackrel{f(x_0)=0}{=} \frac{-f(\gamma)}{x_0 - \gamma} \stackrel{f(\gamma)<0}{\Rightarrow} f'(x_2) > 0$$

Έτσι

η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2)

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει

$$\xi_1 \in (x_1, x_2), \text{ τέτοιο ώστε } f''(\xi_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} \stackrel{f'(x_2)>0, f'(x_1)<0}{\Rightarrow} f''(\xi_1) > 0$$

Ομοίως

η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0, \delta]$ και στο $[\delta, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_0, δ) και στο (δ, β)

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει

$$x_3 \in (x_0, \delta), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_3) = \frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} \stackrel{f(x_0)=0}{=} \frac{f(\delta)}{\delta - x_0} \stackrel{f(\delta)>0}{\Rightarrow} f'(x_3) > 0$$

και

$$x_4 \in (\delta, \beta), \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_4) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} \stackrel{f(\beta)=0}{=} \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} \stackrel{f(\delta)>0}{\Rightarrow} f'(x_4) < 0$$

Έτσι

η συνάρτηση f'

είναι συνεχής στο διάστημα $[x_3, x_4]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_3, x_4)

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει

$$\xi_2 \in (x_3, x_4), \text{ τέτοιο ώστε } f''(\xi_2) = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \stackrel{f(x_4) < 0, f(x_3) > 0 \Rightarrow -f(x_3) < 0}{\Rightarrow} f''(\xi_2) < 0$$

γ) Το Θέμα αυτό ήταν λάθος

Η συνάρτηση f''

είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$

$$\left. \begin{array}{l} f''(\xi_1) > 0 \\ f''(\xi_2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano**, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\xi_1, \xi_2)$

τέτοιο ώστε $f''(\rho) = 0$

όμως δεν γίνεται να αποδειχτεί ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν το ρ ώστε να έχουμε καμπή στο ρ