

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.103 (2003 – 3ο)

- α) Η f ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

που σημαίνει επίσης ότι η f είναι 1-1 και άρα έχει αντίστροφη συνάρτηση

Ακόμη η f' ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με

$$f''(x) = 20x^3 + 6x \Rightarrow 2x(10x^2 + 3)$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow 2x(10x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

- β) Έχουμε ισοδύναμα $f(e^x) \geq f(1+x) \Leftrightarrow e^x \geq 1+x$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq 1+x$

Γι' αυτό θεωρούμε την συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(x) = e^x - x - 1$

Η g ως πολυωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $g'(x) = e^x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έτσι η g' μηδενίζεται στο $x_0 = 0$ με $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

Τα πρόσημα της g' , η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Επομένως η g έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 0

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x + 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

ολικό ελάχιστο

- γ) Η εφαπτόμενη της f στο σημείο $(0,0)$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

που όπως γνωρίζουμε ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}

- δ) Παρατηρούμε ότι

$$f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό θα είναι

$$\int_0^3 |f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 |yf'(y)| dy = \int_0^1 yf'(y) dy = \int_0^1 y(5y^4 + 3y^2 + 1) dy = \int_0^1 (5y^5 + 3y^3 + y) dy = \left[\frac{5}{6}y^6 + \frac{3}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{17}{12}$$

$$= \int_0^1 y(5y^4 + 3y^2 + 1) dy = \int_0^1 (5y^5 + 3y^3 + y) dy = \left[\frac{5y^6}{6} + \frac{3y^4}{4} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5 \cdot 1^6}{6} + \frac{3 \cdot 1^4}{4} + \frac{1^2}{2} - 0 =$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12}$$