

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $w: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, με $w(x) = h(x) - g(x)$

Προφανώς για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι

$$w(x) > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} w(x) dx > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} [h(x) - g(x)] dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

β) ι)

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) [1 + e^{-f(x)}] = 1 \xrightarrow{1+e^{-f(x)} \neq 0}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}$$

ιι) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $1 + e^{-f(x)} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ακόμη επειδή $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}$ συμπεραίνουμε ότι η f' είναι παραγωγίσιμη

ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = -\frac{1}{(1 + e^{-f(x)})^2} (1 + e^{-f(x)})' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1 + e^{-f(x)})^2} e^{-f(x)} (-f'(x)) \Rightarrow f''(x) = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} \xrightarrow{f'(x) > 0} f''(x) > 0$$

που σημαίνει ότι και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ακόμη η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$ αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως λογαριθμική με $f'(x) = \frac{1}{x}$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{f(0)=0} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x) \xrightarrow{\text{διαιρούμε με } x > 0} \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2} < f'(\xi) < f'(x) \text{ που ισχύει}$$

διότι

$$\frac{1}{2} < f'(\xi) \xrightarrow{f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}}} \frac{1}{2} < \frac{1}{1+e^{-f(\xi)}} \xrightarrow{1+e^{-f(\xi)} > 0} 2 > 1 + e^{-f(\xi)} \Leftrightarrow 1 > e^{-f(\xi)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^0 > e^{-f(\xi)} \Leftrightarrow 0 > -f(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) > 0 \Leftrightarrow f(\xi) > f(0) \xrightarrow{f' \nearrow} \xi > 0 \text{ που}$$

ισχύει αφού $\xi \in (0, x)$

$$f'(\xi) < f'(x) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} \xi < x \quad \text{που ισχύει αφού } \xi \in (0, x)$$

iii) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε ότι για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$ οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx \stackrel{f(x) \geq 0}{\Rightarrow} E = \int_0^1 f(x) dx$$

Τώρα από το β) ερώτημα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) &\stackrel{\text{ερώτημα Α}}{\Rightarrow} \int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx \stackrel{\int_0^1 f(x) dx = E}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 (x)' f(x) dx &\Rightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - \int_0^1 f(x) dx \\ \int_0^1 f(x) dx = E &\Rightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E \end{aligned}$$

Οπότε ισχύει

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} < E \\ \text{και} \\ E < f(1) - E \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} < E \\ \text{και} \\ 2E < f(1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} < E \\ \text{και} \\ E < \frac{f(1)}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$$