

α) Είναι

$$\boxed{g(x_1) = g(x_2)} \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \xRightarrow{f \circ g: 1-1} \boxed{x_1 = x_2}$$

β) $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1) \xRightarrow{g: 1-1} \cancel{f(x)} + x^3 - x = \cancel{f(x)} + 2x - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 - x = 2x - 1 \Rightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = x^3 - 3x + 1$

Η h ως πολωνυμική, έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό με $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

Η h' μηδενίζεται στο $x_1 = -1$ και στο $x_2 = 1$ με

$$h(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3 \text{ και } h(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Οπότε

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, -1]$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 3]$

στο διάστημα $A_2 = [-1, 0]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_2) = [f(0), f(-1)] = [1, 3]$

στο διάστημα $A_3 = [0, 1]$ είναι $f \searrow \Rightarrow f(A_3) = [f(1), f(0)] = [-1, 1]$

στο διάστημα $A_4 = [1, +\infty)$ είναι $f \nearrow \Rightarrow f(A_4) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι

- το 0 περιέχεται στο διάστημα $f(A_1)$ οπότε στο $(-\infty, -1)$ η συνάρτηση h έχει μία ρίζα, η οποία προφανώς είναι αρνητική και επειδή η h είναι γνησίως μονότονη στο A_1 η ρίζα αυτή είναι μοναδική
- το 0 δεν περιέχεται στο διάστημα $f(A_2)$ οπότε στο $A_2 = [-1, 0]$ η συνάρτηση h δεν έχει ρίζα
- το 0 περιέχεται στο διάστημα $f(A_3)$ οπότε στο $(0, 1)$ η συνάρτηση h έχει μία ρίζα, η οποία προφανώς είναι θετική και επειδή η h είναι γνησίως μονότονη στο A_3 η ρίζα αυτή είναι μοναδική
- το 0 περιέχεται στο διάστημα $f(A_4)$ οπότε στο $(1, +\infty)$ η συνάρτηση h έχει μία ρίζα, η οποία προφανώς είναι θετική και επειδή η h είναι γνησίως μονότονη στο A_4 η ρίζα αυτή είναι μοναδική

Επομένως τελικά η συνάρτηση h άρα και η εξίσωση

$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα