

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.100 (2001 – 4ο – διασκευασμένο)

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x \quad \overset{f'(x)=-2xf^2(x)}{\Rightarrow} \quad g'(x) = -\frac{-2x \cancel{f^2(x)}}{\cancel{f^2(x)}} - 2x \Rightarrow g'(x) = 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση g είναι σταθερή

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = c \Rightarrow \frac{1}{f(x)} - x^2 = c \quad (1)$

$$(1) \quad \overset{\text{θέτουμε } x=0}{=} \quad \frac{1}{f(0)} - 0^2 = c \quad \overset{f(0)=1}{\Rightarrow} \quad c=1 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\gamma) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta\mu 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}\eta\mu 2x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= 0 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 0} = 0$$

διότι

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \quad \overset{\substack{\text{όταν } x \rightarrow +\infty \\ x > 0}}{\Rightarrow} \quad -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \leq \frac{1}{x} \\ \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κριτήριο παρεμβολής} \\ \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0 \end{array}$$