

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.10

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

$$\left. \begin{array}{l} f(\alpha) = 5\beta > 0 \\ f(\beta) = 5\alpha < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) = 25\alpha\beta < 0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f(x_0) = 0$$

β) Η ευθεία $\varepsilon: x - 5y - 2010 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \frac{1}{5}$.

Για να είναι μία εφαπτομένη της C_f κάθετη στην ε , θα πρέπει

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = -5 \text{ όπου } \lambda_2 \text{ ο συντελεστής}$$

διεύθυνσης της εφαπτομένης. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει

$$\xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = -5. \text{ Πράγματι}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{5\alpha - 5\beta}{\beta - \alpha} = \frac{-5(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = -5$$

γ) Είναι $5\alpha < \frac{5(\alpha + \beta)}{2} < 5\beta$

διότι

$$\frac{5(\alpha + \beta)}{2} < 5\beta \Leftrightarrow \frac{\cancel{5}(\alpha + \beta)}{2} < \cancel{5}\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta < 2\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει}$$

και

$$\frac{5(\alpha + \beta)}{2} < 5\alpha \Leftrightarrow \frac{\cancel{5}(\alpha + \beta)}{2} < \cancel{5}\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} < \alpha \Leftrightarrow \alpha + \beta < 2\alpha \Leftrightarrow \beta < \alpha \text{ που ισχύει}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

$$\left. \begin{array}{l} f(\alpha) = 5\beta \\ f(\beta) = 5\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow f(\beta) < \frac{5(\alpha + \beta)}{2} < f(\alpha)$$

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών,

$$\text{υπάρχει } x_1 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_1) = \frac{5(\alpha + \beta)}{2}$$