

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.1

α) Ισχύει $xf(x) = x + 2\eta\mu x$ για κάθε $x \neq 0$, άρα μπορούμε να διαιρέσουμε με x .

$$\text{Οπότε } f(x) = 1 + 2 \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{Η } f \text{ είναι συνεχής} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 2 \frac{\eta\mu x}{x} \right) \stackrel{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1}{=} 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

β) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x > 0$ και $x > 0$. Άρα για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{είναι } \eta\mu x = |\eta\mu x| \text{ και } x = |x|. \text{ Ισχύει επίσης } |\eta\mu x| \leq |x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = 0, \text{ οπότε } \frac{\eta\mu x}{x} < 1 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Άρα: } f(x) = 1 + 2 \frac{\eta\mu x}{x} < 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

γ) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ως

άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= f - 2 = 1 + 2 \frac{\eta\mu \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - 2 = 1 + \frac{4}{\pi} - 2 = \frac{4}{\pi} - 1 > 0 \\ g(\pi) &= f(\pi) - 2 = 1 + 2 \frac{\eta\mu \pi}{\pi} - 2 = 1 + 2 \cdot 0 - 2 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(\pi) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - 2 = 0 \Rightarrow f(x_0) = 2$. Άρα η εξίσωση

$$f(x) = 2 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

δ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow -\frac{2}{x} \leq \frac{2\eta\mu x}{x} \leq \frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{x} \leq 1 + \frac{2\eta\mu x}{x} \leq 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow 1 - \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{2}{x}$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1 \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$