

α) Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι

$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow \text{η } f' \text{ είναι αύξουσα} \stackrel{x \geq 0}{\Rightarrow} f'(x) \geq f'(0) \stackrel{f'(0)=1}{\Rightarrow} f'(x) \geq 1 \quad (1)$$

Οπότε για κάθε $x \in [0,1]$, η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = f'(x) - 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g'(x) \geq 0. \text{ Άρα η } g \text{ είναι αύξουσα στο } [0,1]$$

$$\begin{aligned} \beta) \int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 [f(x) - 1 - x] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 1 dx - \int_0^1 x dx \stackrel{\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2}}{=} \\ &= \frac{3}{2} - [x]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} - (1 - 0) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 0 \end{aligned}$$

γ) Για κάθε $x \in [0,1]$, είναι, $x \geq 0 \stackrel{g \text{ αύξουσα}}{\Rightarrow} g(x) \geq 0$, οπότε σύμφωνα με γνωστή πρόταση αν η g δεν είναι παντού μηδέν τότε $\int_0^1 g(x) dx > 0$ άτοπο διότι από το β)

$$\text{ερώτημα είναι } \int_0^1 g(x) dx = 0$$

Άρα η g είναι παντού μηδέν, δηλαδή για κάθε $x \in [0,1]$ είναι

$$g(x) = 0 \Rightarrow f(x) - 1 - x = 0 \Rightarrow f(x) = x + 1$$