

α) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$x^2 f''(x) = 2[f(x) - x] \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} f''(x) = \frac{2[f(x) - x]}{x^2}$$

Οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$f(x) - x$ συνεχής ως διαφορά συνεχών

$2[f(x) - x]$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών

$f'' = \frac{2[f(x) - x]}{x^2}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών

Άρα η f'' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και επειδή είναι συνεχής και στο 0 προκύπτει ότι η f'' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$

β) Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$x^2 f''(x) = 2[f(x) - x] \Rightarrow x^2 f''(x) = 2f(x) - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 f''(x) + 2xf'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x^2 f'(x)]' = [2xf(x) - x^2]' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 f'(x) = 2xf(x) - x^2 + c \quad (1) \quad c: \text{σταθερά}$$

$$(1) \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} 1^2 \cdot f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot f(1) - 1^2 + c \stackrel{f(1)=2, f'(1)=3}{\Rightarrow} 3 = 4 - 1 + c \Rightarrow c = 0 \quad (2)$$

Έτσι

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x^2 f'(x) = 2xf(x) - x^2 \Rightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = -x^2 \stackrel{\text{διαφορ. με } x^4 \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} + c_1 \quad (3) \quad c_1: \text{σταθερά}$$

$$(3) \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} \frac{f(1)}{1^2} = \frac{1}{1} + c_1 \stackrel{f(1)=2}{\Rightarrow} c_1 = 1 \quad (4)$$

Έτσι

$$(3) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + x$$