

$$f'(t) \ln f(t) = te^t \Rightarrow \int_1^x f'(t) \ln f(t) dt = \int_1^x te^t dt \quad (1)$$

Όμως

$$\int_1^x f'(t) \ln f(t) dt \stackrel{\substack{y=f(t) \Rightarrow dy=f'(t)dt \\ \text{για } t=1 \Rightarrow y=f(1) \\ \text{για } t=x \Rightarrow y=f(x)}}{=} \int_{f(1)}^{f(x)} \ln y dy \stackrel{f(1)=e}{=} \int_e^{f(x)} (y)' \ln y dy \stackrel{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \left[y \ln y \right]_e^{f(x)} - \int_e^{f(x)} y (\ln y)' dy = f(x) \ln f(x) - e - \int_e^{f(x)} 1 dy =$$

$$f(x) \ln f(x) - e - 1 \cdot (f(x) - e) = f(x) \ln f(x) - f(x)$$

$$f(x) \ln f(x) - e - 1 \cdot (f(x) - e) = f(x) \ln f(x) - f(x)$$

Άρα

$$\int_1^x f'(t) \ln f(t) dt = f(x) \ln f(x) - f(x) \quad (2)$$

Ακόμη

$$\int_1^x te^t dt = \int_1^x t (e^t)' dt \stackrel{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \left[te^t \right]_1^x - \int_1^x (t)' e^t dt = xe^x - e - \int_1^x e^t dt =$$

$$= xe^x - e - \left[e^t \right]_1^x = xe^x - e^x + e = xe^x - e^x$$

Άρα

$$\int_1^x te^t dt = xe^x - e^x \quad (3)$$

Οπότε

$$(1) \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} f(x) \ln f(x) - f(x) = xe^x - e^x \stackrel{x=\ln e^x}{\Rightarrow} f(x) \ln f(x) - f(x) = e^x \ln e^x - e^x \quad (4)$$

Θέτουμε τώρα την συνάρτηση h με

$$h(x) = x \ln x - x, \quad x > 1$$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = (x)' \ln x + x (\ln x)' - (x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Οπότε για κάθε $x > 1$ είναι $h'(x) > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα η h είναι 1-1

Έτσι

$$(4) \stackrel{h(x)=x \ln x - x}{\Rightarrow} h(f(x)) = h(e^x) \stackrel{h(1)=1}{\Rightarrow} f(x) = e^x$$