

α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \text{θέτουμε όπου } x \text{ το } \frac{\pi}{2}-x \\
 & f(\varepsilon\phi x) f'(\sigma\phi x) = 2\varepsilon\phi x \quad \Rightarrow \\
 & \Rightarrow f\left(\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) f'\left(\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = 2\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \quad \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\phi x, \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varepsilon\phi x \quad \Rightarrow \\
 & \Rightarrow f(\sigma\phi x) f'(\varepsilon\phi x) = 2\sigma\phi x \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(\varepsilon\phi x) f(\sigma\phi x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= \frac{f'(\varepsilon\phi x) f(\sigma\phi x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{f(\varepsilon\phi x) f'(\sigma\phi x)}{\eta\mu^2 x} \quad f(\varepsilon\phi x) f'(\sigma\phi x) = 2\varepsilon\phi x, f(\sigma\phi x) f'(\varepsilon\phi x) = 2\sigma\phi x \\
 &= \frac{2\sigma\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{2\varepsilon\phi x}{\eta\mu^2 x} = \frac{2\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{2\cancel{\eta\mu x}}{\eta\mu^2 x} = \frac{2}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} - \frac{2}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = 0
 \end{aligned}$$

Άρα η h είναι σταθερή στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ακόμη

$$\begin{aligned}
 & \text{θέτουμε } x = \frac{\pi}{4} \\
 & f(\varepsilon\phi x) f'(\sigma\phi x) = 2\varepsilon\phi x \quad \Rightarrow \quad f\left(\varepsilon\phi \frac{\pi}{4}\right) f'\left(\sigma\phi \frac{\pi}{4}\right) = 2\varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow f(1) f'(1) = 2 \quad \overset{f'(1)=2}{\Rightarrow} \quad f(1) = 1 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Έτσι

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\varepsilon\phi \frac{\pi}{4}\right) f\left(\sigma\phi \frac{\pi}{4}\right) = f(1) f(1) \overset{(1)}{=} 1$$

Οπότε για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $h(x) = 1 \Rightarrow f(\varepsilon\phi x) f(\sigma\phi x) = 1$