35.81

α) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν ίσες παραγώγους. Πράγματι

$$\boxed{\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'}=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' \overset{f'(x)=\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}+\frac{1}{x}}{=} \left[\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right]\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)}{\frac{1}{x^2}+1}+x\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\left(\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)}{\frac{x^2+1}{x^2}}+x\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\cancel{x^2}}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}}-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}\cancel{x}=-\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)}{x^2+1}-\frac{1}{x}=\boxed{-f'(x)}$$

Οπότε $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=\left[-f(x)\right]'\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)+c$ (1) όπου c: σταθερός

Ακόμη (1) $\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)+c \overset{x=1}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{1}\right)=-f(1)+c \overset{f(1)=0}{\Rightarrow} c=0$ (2)

Έτσι (1),(2) $\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

β) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}+\frac{1}{x}\Rightarrow \overset{f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)}{\Rightarrow} f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=(\ln x)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\ln x+c_1 \quad (3)$$

Όμως

(3) $\overset{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} f(1)=\ln 1+c_1 \overset{f(1)=0}{\Rightarrow} c_1=0$ (4) όπου c_1: σταθερός

Οπότε

(3) $\overset{(4)}{\Rightarrow} f(x)=\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$