

α) Επειδή το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(t) dt$ είναι ένας σταθερός αριθμός, θέτουμε

$$\int_1^2 f(t) dt = c \quad (1)$$

Επομένως

$$xf'(x) = 2f(x) + 5 \int_1^2 f(t) dt \stackrel{(1)}{\Rightarrow} xf'(x) = 2f(x) + 5c \Rightarrow xf'(x) - 2f(x) = 5c \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \text{πολλαπλασιάζουμε με } x \quad x^2 f'(x) - 2xf(x) = 5cx \quad \Rightarrow \quad \text{διαιρούμε με } x^4 \neq 0 \quad \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{5c}{x^3} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(-\frac{5c}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{5c}{2x^2} + c_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5c}{2} + c_1 x^2 \quad (2) \quad c_1 : \text{σταθερά}$$

Οπότε

$$(2) \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} f(1) = -\frac{5c}{2} + c_1 \cdot 1^2 \stackrel{f(1)=-4}{\Rightarrow} -4 = -\frac{5c}{2} + c_1 \Rightarrow 5c - 2c_1 = 8 \quad (3)$$

Ακόμη

$$(2) \stackrel{\text{ολοκληρώνουμε}}{\Rightarrow} \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 -\frac{5c}{2} dx + \int_1^2 c_1 x^2 dx \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow c = -\frac{5c}{2}(2-1) + c_1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \Rightarrow c = -\frac{5c}{2} + \frac{7c_1}{3} \Rightarrow \cancel{7c} = \cancel{7c_1} \Rightarrow 3c = 2c_1 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) βρίσκουμε $c = 4$ και $c_1 = 6$

Έτσι

$$(2) \stackrel{c=4, c_1=6}{\Rightarrow} f(x) = 6x^2 - 10$$

β) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v} \stackrel{\text{α) ερώτημα}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 10}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{x^v} = \begin{cases} +\infty & \alpha\nu \quad v = 0 \\ 6 & \alpha\nu \quad v = 2 \\ 0 & \alpha\nu \quad v > 2 \end{cases}$$