

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x^3) - f(3x)$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3f'(3x) \quad (1)$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } h(0) = f(1^3) - f(3 \cdot 1) \Rightarrow h(0) = f(1) - f(3) \stackrel{f(1)=f(3)}{\Rightarrow} h(1) = 0 \quad (2)$$

Ακόμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$f(x^3) \geq f(3x) \Rightarrow f(x^3) - f(3x) \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} h(x) \geq h(1)$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \geq h(1)$ και άρα η f παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο) στο

$x_0 = 1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $h'(1) = 0$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 3 \cdot 1^2 \cdot f'(1^3) - 3f'(3 \cdot 1) = 0 \Rightarrow 3f'(1) - 3f'(3) = 0 \Rightarrow f'(1) = f'(3) \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[1, 3]$. Πράγματι

αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 3]$

η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 3)$

και $f'(1) = f'(3)$ λόγω της (3)

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε

η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$