

Έχουμε

$$g'(x) = f(x) + 2f(2x) + 4f(4x) \quad \text{ολοκληρώνουμε} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 g'(x) dx = \int_1^2 [f(x) + 2f(2x) + 4f(4x)] dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [g(x)]_1^2 = \int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 2f(2x) dx + \int_1^2 4f(4x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(2) - g(1) = \int_1^2 f(x) dx + 2 \int_1^2 f(2x) dx + 4 \int_1^2 f(4x) dx \quad (1)$$

Όμως

$$2 \int_1^2 f(2x) dx \stackrel{\substack{y=2x \Rightarrow dy=2dx \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=2 \\ \text{για } x=2 \Rightarrow y=4}}{=} 2 \int_2^4 f(y) \frac{1}{2} dy = \int_2^4 f(y) dy \quad (2)$$

$$4 \int_1^2 f(4x) dx \stackrel{\substack{y=4x \Rightarrow dy=4dx \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=4 \\ \text{για } x=2 \Rightarrow y=8}}{=} 4 \int_4^8 f(y) \frac{1}{4} dy = \int_4^8 f(y) dy \quad (3)$$

Άρα

$$(1) \stackrel{(2), (3)}{\Rightarrow} g(2) - g(1) = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^8 f(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(2) - g(1) = \int_1^8 f(x) dx \quad (4)$$

Ακόμη η συνάρτηση g είναι

συνεχής στο $[1, 2]$

παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} \Rightarrow g'(\xi) = g(2) - g(1) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} g'(\xi) = \int_1^8 f(x) dx$$