

α) Επειδή η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ρίζα τον αριθμό x_0 σημαίνει ότι $f(x_0)=1$ (1)

Οπότε

$$f(x)+x=F(f(x))+e+1 \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0)+x_0=F(f(x_0))+e+1 \Rightarrow$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 1+x_0=F(1)+e+1 \xrightarrow{F(1)=0} \boxed{x_0=e}$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει $f(e)=1$ (2)

Ακόμη

$$f(x)+x=F(f(x))+e+1 \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}}$$

$$\Rightarrow f'(x)+1=F'(f(x))f'(x) \xrightarrow{F'(x)=g(x) \Rightarrow F'(f(x))=g(f(x))}$$

$$\Rightarrow f'(x)+1=g(f(x))f'(x) \xrightarrow{g(x)=f^{-1}(x)+1 \Rightarrow g(f(x))=f^{-1}(f(x))+1 \xrightarrow{f^{-1}(f(x))=x} g(f(x))=x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x)+1=(x+1)f'(x) \Rightarrow \cancel{f'(x)}+1=x\cancel{f'(x)}+f'(\cancel{x}) \xrightarrow{x \neq 0}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=(\ln x)' \Rightarrow f(x)=\ln x+c \quad (3) \quad c: \text{σταθερός}$$

Όμως

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=e} f(e)=\ln e+c \stackrel{(2)}{\Rightarrow} c=0 \quad (4)$$

Οπότε

$$\stackrel{(4)}{(3)} \Rightarrow \boxed{f(x)=\ln x}$$