

Έστω $x \in [1, 2]$. Τότε επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$, ισχύει ότι

Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, x)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x - 1}$ (1)

Επειδή για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι $\sqrt{e} \leq f'(x) \leq e$ θα ισχύει και

$$\sqrt{e} \leq f'(\xi) \leq e \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \sqrt{e} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq e \stackrel{x>1}{\Rightarrow} \sqrt{e}(x-1) \leq f(x) \leq e(x-1) \stackrel{\text{ολοκληρώνουμε}}{\Rightarrow} \quad (\text{για } x=1, \text{ ισχύει η ισότητα})$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{e}(x-1) dx \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \int_1^2 e(x-1) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{e} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq e \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{e}}{2} \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \frac{e}{2}$$

Παρατήρηση: Πρέπει να αποδειχτεί η ιδιότητα

Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) < g(x) < h(x)$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx < \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx$$