

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f''(x) = 2xf'(x) + 2f(x) \Rightarrow f''(x) = [2xf(x)]' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2xf(x) + c \quad (1) \quad c: \text{σταθερά}$$

$$(1) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot f(0) + c \xrightarrow{f'(0)=0} c = 0 \quad (2)$$

Έτσι

$$(1) \xrightarrow{(2)} f'(x) = 2xf(x) \xrightarrow{f(x) \neq 0} \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \Rightarrow [\ln f(x)]' = (x^2)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = x^2 + c_1 \quad (3) \quad c_1: \text{σταθερά}$$

$$(3) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} \ln f(x) = x^2 + c_1 \Rightarrow \ln f(0) = 0^2 + c_1 \xrightarrow{f(0)=1} c_1 = 0 \quad (4)$$

Οπότε

$$(3) \xrightarrow{(4)} \ln f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = e^{x^2}$$