

α) Έστω $x > 0$. Τότε

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

$$|f(x)| \leq |x| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -1 \leq f'(\xi) \leq 1 \text{ που ισχύει διότι}$$

$$-1 \leq f'(x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ άρα και } -1 \leq f'(\xi) \leq 1$$

Άρα ισχύει $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x > 0$

Ομοίως ισχύει $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x < 0$

Προφανώς ισχύει $|f(x)| \leq |x|$ για $x = 0$, αφού $f(0) = 0$

Τελικά ισχύει $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ θα είναι

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \stackrel{|f(x)| \leq |x|}{\Rightarrow} E \leq \int_{\alpha}^{\beta} |x| dx \stackrel{0 \leq \alpha < \beta}{\Rightarrow} E \leq \int_{\alpha}^{\beta} x dx \stackrel{E = \frac{(2\beta-1)^2 + 1}{4}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{(2\beta-1)^2 + 1}{4} \leq \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} \Rightarrow \frac{(2\beta-1)^2 + 1}{4} \leq \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\beta^2 - 4\beta + 1 + 1}{4} \leq \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \Rightarrow \frac{4\beta^2 - 4\beta + 2}{2} \leq \beta^2 - \alpha^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\beta^2 - 2\beta + 1 \leq \beta^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 - 2\beta + 1 + \alpha^2 \leq 0 \Rightarrow (\beta-1)^2 + \alpha^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{(\beta-1)^2 \geq 0 \text{ και } \alpha^2 \geq 0}{\Rightarrow} (\beta-1)^2 = 0 \text{ και } \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 1$$