

Έστω ότι υπάρχει $x_1 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_1) \cdot f(\alpha) < 0$. Επειδή $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ θα είναι και $f(x_1) \cdot f(\beta) < 0$

Προφανώς θα είναι $x_1 \neq \alpha$, και $x_1 \neq \beta$ οπότε $\alpha < x_1 < \beta$

Τότε

επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, x_1]$ και $f(x_1) \cdot f(\alpha) < 0$

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x_1)$, τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = 0$

και ομοίως

επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, \beta]$ και $f(x_1) \cdot f(\beta) < 0$

σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(\xi_2) = 0$

Και επειδή $\xi_1 \neq \xi_2$ η f θα έχει δύο ρίζες στο $[\alpha, \beta]$, άτοπο

Άρα δεν υπάρχει $x_1 \in [\alpha, \beta]$ με $f(x_1) \cdot f(\alpha) < 0$, επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \cdot f(\alpha) \geq 0$