35.71

Επειδή το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t)dt$ είναι ένας σταθερός αριθμός , θέτουμε

$\int_0^1 f(t)dt = c \quad (1)$

Επομένως

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x) = f(x) + c \Rightarrow f'(x) - f(x) = c \Rightarrow$$

$$\overset{\text{πολλαπλασιάζουμε με } e^{-x}}{\Rightarrow} e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = ce^{-x} \Rightarrow \left[e^{-x}f(x)\right]' = \left[-ce^{-x}\right]' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-x}f(x) = -ce^{-x} + c_1 \Rightarrow f(x) = -c + c_1e^x \ (2) \ c_1 : \text{σταθερά}$$

Οπότε

$$(2) \overset{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} f(1) = -c + c_1e^1 \overset{f(1)=1}{\Rightarrow} 1 = -c + c_1e \quad (3)$$

Ακόμη

$$(2) \overset{\text{ολοκληρώνουμε}}{\Rightarrow} \int_0^1 f(x) = \int_0^1 -c + \int_0^1 c_1e^x \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow c = -c + c_1\left[e^x\right]_0^1 \Rightarrow 2c = c_1\left(e^1 - e^0\right) \Rightarrow 2c = c_1(e-1) \ (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) βρίσκουμε $c = \dfrac{e-1}{e+1}$ και $c_1 = \dfrac{2}{e+1}$

Έτσι

$$(2) \overset{c=\frac{e-1}{e+1},\ c_1=\frac{2}{e+1}}{\Rightarrow} f(x) = -\frac{e-1}{e+1} + \frac{2}{e+1}e^x \Rightarrow f(x) = \frac{2e^x - e + 1}{e+1}$$