

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ θα έχει σύνολο τιμών το $f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$ και επειδή $f([\alpha, \beta]) = [\gamma, \delta]$ συμπεραίνουμε ότι $f(\alpha) = \gamma$ και $f(\beta) = \delta$ και άρα $f^{-1}(\gamma) = \alpha$ (1) και $f^{-1}(\delta) = \beta$ (2)

$$\int_{\gamma}^{\delta} f^{-1}(x) dx \stackrel{\substack{y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \\ dx=f'(y)dy \\ \text{για } x=\gamma \Rightarrow y=f^{-1}(\gamma)=\alpha \\ \text{για } x=\delta \Rightarrow y=f^{-1}(\delta)=\beta}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} y f'(y) dy \stackrel{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} [y f(y)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (y)' f(y) dy =$$

$$\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy$$

$$\text{Άρα } \int_{\gamma}^{\delta} f^{-1}(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy \quad (3)$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\delta} f^{-1}(x) dx &\stackrel{(3)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy \quad (3) \\ &= \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) \end{aligned}$$