

Αφού συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \quad (1)$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{\text{θέτουμε } y = -x}{\Rightarrow} f'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(-y) - f(0)}{-y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -f'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(-y) - f(0)}{y} \quad (2) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} &\stackrel{\text{προσθαφαιρούμε το } f(0)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) + f(0) - f(-x)}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(-x)}{x} \stackrel{(1), (2)}{=} \\ &= \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} f'(0) = f'(0) \end{aligned}$$