

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x) \Rightarrow g'(x) = e^{-2x}[-2f(x) + f'(x)]$$

Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η g' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g''(x) = -2e^{-2x}[-2f(x) + f'(x)] + e^{-2x}[-2f'(x) + f''(x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(x) = e^{-2x}[4f(x) - 2f'(x) - 2f'(x) + f''(x)] \Rightarrow g''(x) = e^{-2x}[4f(x) - 4f'(x) + f''(x)]$$

Επειδή $f''(x) > 4(f'(x) - f(x)) \Rightarrow g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

β) Επειδή η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο το 0 θα ισχύει $f(x_0) = 0$ και $f'(x_0) = 0$

Ακόμη

$$g'(x) = e^{-2x}[-2f(x) + f'(x)] \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} g'(x_0) = e^{-2x_0}[-2f(x_0) + f'(x_0)] \xrightarrow{f(x_0)=f'(x_0)=0} g'(x_0) = 0$$

Επειδή η g είναι κυρτή η g' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε

$$\text{για κάθε } x < x_0 \xrightarrow{g' \nearrow} g'(x) < g'(x_0) \Rightarrow g'(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x > x_0 \xrightarrow{g' \nearrow} g'(x) > g'(x_0) \Rightarrow g'(x) > 0$$

Τα πρόσημα της g' η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Από τον πίνακα αυτό είναι προφανές ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow e^{-2x}f(x) \geq 0 \xrightarrow{e^{-2x} > 0} f(x) \geq 0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			