

Έστω F μια αρχική της f . Τότε

Η συνάρτηση F

είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$,

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$ με $F'(x) = f(x)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = f(2) - f(1) \quad (1)$$

Ακόμη

Η συνάρτηση F

είναι συνεχής στο διάστημα $[3, 4]$,

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(3, 4)$ με $F'(x) = f(x)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει $\xi_1 \in (3, 4)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} \Rightarrow f'(\xi_1) = f(4) - f(3) \quad (2)$$

Όμως

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx \Rightarrow F(3) - F(1) = F(4) - F(2) \Rightarrow F(2) - F(1) = F(4) - F(3) \quad (3)$$

$$\text{Έτσι από } (1), (2), (3) \Rightarrow f(\xi_1) = f(\xi_2) \quad (4)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 4]$ τότε λόγω της **(4)** εφαρμόζεται το

θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο μηδενισμού της f' , άρα η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο

β) Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 4]$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που η f δεν παραγωγίζεται άρα πάλι έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο