

$$\alpha) f(x) = \alpha f^2(x) + f'(x) \Rightarrow f(x) - f'(x) = \alpha f^2(x) \quad f(x) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f'(x)}{f^2(x)} = \alpha \quad \xrightarrow{\text{πολλαπλασιάζουμε με } e^x} \Rightarrow \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{f^2(x)} = \alpha e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^x}{f(x)} \right)' = (\alpha e^x)' \Rightarrow \frac{e^x}{f(x)} = \alpha e^x + c \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{\alpha e^x + c} \quad (1), c: \text{σταθερά}$$

Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$ θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \xRightarrow{(1)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha e^x + c} = 1 \xRightarrow[\text{DLH}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(\alpha e^x + c)'} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha e^x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \quad (2)$$

Ακόμη

$$f(0) = \frac{1}{3} \xRightarrow{(1), (2)} \frac{e^0}{e^0 + c} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = 2 \quad (3)$$

Επομένως

$$(1) \xRightarrow{(2), (3)} f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

β) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx \quad \begin{matrix} f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2} > 0 \\ = \end{matrix} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2} dx = \left[\ln(e^x + 2) \right]_0^1 =$$

$$= \ln(e^1 + 2) - \ln(e^0 + 2) = \ln(e + 2) - \ln 3 = \ln\left(\frac{e+2}{3}\right)$$