

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt$, $x \in [\alpha, \beta]$

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, σύμφωνα με γνωστή πρόταση ορίζονται οι συναρτήσεις $\int_a^x f(t)dt$ και $\int_a^x g(t)dt$, οι οποίες είναι και παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$

Οπότε εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[\alpha, \mu]$. Πράγματι

η h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \mu]$ ως διαφορά συνεχών

η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, μ) ως διαφορά παραγωγισίμων με

$$h'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' - \left(\int_a^x g(t)dt \right)' \Rightarrow h'(x) = f(x) - g(x) \quad (1)$$

$$h(\alpha) = \int_a^0 f(t)dt - \int_a^0 g(t)dt = 0 - 0 = 0$$

$$h(\mu) = \int_a^\mu f(t)dt - \int_a^\mu g(t)dt \stackrel{\int_a^\mu f(t)dt = \int_a^\mu g(t)dt}{=} 0$$

$$\text{Άρα } h(\alpha) = h(\mu) = 0$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \mu)$ άρα

$$\text{και } \xi \in (\alpha, \mu) \text{ τέτοιο ώστε } h'(\xi) \stackrel{(1)}{=} 0 \Rightarrow f(\xi) - g(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$f(\xi) = g(\xi)$$