

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[α,β]$

$$f(α) \cdot f(β) < 0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (α,β)$, τέτοιο
ώστε $f(x_0) = 0$

Όμως

$$2f^3(x) - 4f^2(x) - 6f(x) = x^3 + x \quad \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f^3(x_0) - 4f^2(x_0) - 6f(x_0) = x_0^3 + x_0 \quad \xrightarrow{f(x_0)=0} \Rightarrow x_0^3 + x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0(x_0^2 + 1) = 0 \quad \xrightarrow{x_0^2 + 1 \neq 0} \Rightarrow x_0(x_0^2 + 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

$$\text{Όμως } x_0 \in (α,β) \Rightarrow α < x_0 < β \xrightarrow{x_0=0} \boxed{α < 0 < β}$$

Που σημαίνει ότι οι αριθμοί $α$ και $β$ είναι ετερόσημοι