35.60

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R , ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$g'(x)=2f'(x)f''(x)+2f(x)f'(x)\overset{f''(x)=-f(x)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow g'(x)=-2f'(x)f(x)+2f(x)f'(x)\Rightarrow\ g'(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x)=c\quad (1)\ ,\text{ για κάθε } x\in R\ ,\text{ όπου c: σταθερός}$$

Όμως

$$g(x)=\left[f'(x)\right]^2+\left[f(x)\right]^2\overset{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} g(0)=\left[f'(0)\right]^2+\left[f(0)\right]^2\overset{f(0)=f'(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$g(0)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}c=0$$

Οπότε

$$(1),(2)\Rightarrow g(x)=0\Rightarrow\left[f'(x)\right]^2+\left[f(x)\right]^2=0\overset{\left[f'(x)\right]^2\geq 0\text{ και }\left[f(x)\right]^2\geq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\left[f'(x)\right]^2=0\text{ και }\left[f(x)\right]^2=0\Rightarrow f'(x)=0\text{ και } f(x)=0$$

Άρα $\boxed{f(x)=0}$, για κάθε $x\in R$