

α) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+3)-7}{4x} = 2$ $\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=x+3 \Rightarrow x=y-3 \\ \text{όταν } x \rightarrow 0 \quad y \rightarrow 3}}{\Rightarrow} \lim_{y \rightarrow 3} \frac{f(y)-7}{4(y-3)} = 2$

Οπότε

$$\frac{f(x)-7}{x-3} = 4 \frac{f(x)-7}{4(x-3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-7}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} 4 \frac{f(x)-7}{4(x-3)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-7}{x-3} = 4 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-7}{4(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-7}{x-3} = 4 \cdot 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-7}{x-3} = 8$$

β) Θέτουμε $h(x) = \frac{f(x)-7}{x-3}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 8$ (1) και ακόμη

$$h(x) = \frac{f(x)-7}{x-3} \Rightarrow h(x)(x-3) = f(x)-7 \Rightarrow f(x) = h(x)(x-3) + 7$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} [h(x)(x-3) + 7] = \lim_{x \rightarrow 3} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) + 7 \overset{(1)}{=} 8 \cdot 0 + 7 = 7$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ άρα $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$