Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

35.59

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=\dfrac{F(x)}{x}$, $x\in[\alpha,\beta]$ $(0\notin[\alpha,\beta])$

Εφαρμόζουμε <u>θεώρημα Rolle</u> για την h στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Πράγματι

η h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ως πηλίκο συνεχών
η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$h'(x)=\frac{(x)'\cdot F(x)-x\cdot F'(x)}{x^2}\overset{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow}h'(x)=\frac{F(x)-x\cdot f(x)}{x^2}$$

$$h(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\alpha}\overset{F(\alpha)=0}{=}0$$

$$h(\beta)=\frac{F(\beta)}{\beta}\overset{\int_\alpha^\beta f(t)dt=0\Rightarrow F(\beta)-F(\alpha)=0\overset{F(\alpha)=0}{\Rightarrow}F(\beta)=0}{=}0$$

Άρα $h(\alpha)=h(\beta)=0$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του <u>θεωρήματος Rolle</u> οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $c\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(c)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{F(c)-c\cdot f(c)}{c^2}=0\Rightarrow F(c)-c\cdot f(c)=0\Rightarrow\boxed{F(c)=c\cdot f(c)}$$