35.58

α) Έστω $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$, $x\in R$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{g''(x)g(x)-(g'(x))^2}{g^2(x)} \overset{g''(x)g(x)-(g'(x))^2>0}{\Rightarrow} f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in R$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα

β) Αν $x_1=x_2$ τότε

$$g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_1}{2}\right)\le\sqrt{g(x_1)g(x_1)}\Leftrightarrow g(x_1)\le\sqrt{g^2(x_1)}\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} g(x_1)\le g(x_1)$$ ισχύει ως ισότητα

Έστω τώρα ότι $x_1<x_2$

Έχουμε ισοδύναμα

$$g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}\ln\left[g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\right]\le\ln\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]\le\frac{1}{2}\ln\left[g(x_1)g(x_2)\right]\Leftrightarrow\ln\left[g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]\le\frac{\ln\left[g(x_1)\right]+\ln\left[g(x_2)\right]}{2}$$

Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $h:R\to R$ με $h(x)=\ln\left[g(x)\right]$, $x\in R$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\boxed{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{h(x_1)+h(x_2)}{2}}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1,x_2]$ με

$$h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Με βάση το α) ερώτημα η h' είναι γνησίως αύξουσα στο R

Ακόμη

$x_1<\frac{x_1+x_2}{2}$ (διότι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow 2x_1<x_1+x_2\Leftrightarrow x_1<x_2$ που ισχύει)

και

$\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$ (διότι $\frac{x_1+x_2}{2}<x_2\Leftrightarrow x_1+x_1<2x_2\Leftrightarrow x_1<x_2$ που ισχύει)

δηλαδή είναι $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$

Οπότε

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi_1) = \frac{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1} \Rightarrow h'(\xi_1) = \frac{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_1+x_2-2x_1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(\xi_1) = \frac{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}} \quad (1)$$

Ομοίως η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right)$, τέτοιο ώστε

$$h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}} \Rightarrow h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{2x_2-x_1-x_2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}} \quad (2)$$

Επειδή η h' είναι γνησίως αύξουσα στο R έχουμε

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{h'\nearrow}{\Rightarrow} h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - h(x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}} < \frac{h(x_2) - h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{\frac{x_2-x_1}{2}} \overset{\frac{x_2-x_1}{2}>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - h(x_1) < h(x_2) - h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \Rightarrow 2h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < h(x_2) + h(x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{h(x_2)+h(x_1)}{2}}$$

Οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει $g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\le\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$, για κάθε $x\in R$