35.57

α) Έχουμε

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx \underset{\substack{\text{για } x=f(\alpha)\Rightarrow y=\alpha \\ \text{για } x=f(\beta)\Rightarrow y=\beta}}{\overset{y=f^{-1}(x)\Rightarrow x=f(y)\Rightarrow dx=f'(y)dy}{=}} \int_{\alpha}^{\beta} yf'(y)\,dy \overset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=}$$

$$=\left[yf(y)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta} y'f(y)\,dy=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

Άρα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \Rightarrow$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)-\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx$$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=x+\sqrt{x^2+144}$, $x\in[5,9]$

Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$h'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+144}}>0$$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα <u>αντιστρέψιμη</u>

Θα βρούμε τώρα τον τύπο της h^{-1}. Έχουμε

$$y=x+\sqrt{x^2+144}\Rightarrow y-x=\sqrt{x^2+144}\Rightarrow (y-x)^2=\sqrt{x^2+144}^{\,2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2-2yx+\cancel{x^2}=\cancel{x^2}+144\Rightarrow x=\frac{y^2-144}{2y}\Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{x^2-144}{2x}\quad (1)$$

Ακόμη $h(5)=18$ (2) και $h(9)=24$ (3) . Οπότε

$$\int_5^9\left(x+\sqrt{x^2+144}\right)dx=\int_5^9 h(x)\,dx \overset{\text{α) ερώτημα}}{=} 9h(9)-5h(5)-\int_{h(5)}^{h(9)} h^{-1}(x)\,dx \overset{(1),(2),(3)}{=}$$

$$=9\cdot 24-5\cdot 18-\int_{18}^{24}\frac{x^2-144}{2x}\,dx=126-\int_{18}^{24}\left(\frac{x}{2}-\frac{72}{x}\right)dx=$$

$$=126-\left[\frac{x^2}{4}-72\ln x\right]_{18}^{24}=63+72\ln\frac{4}{3}$$