

- α) Στη σχέση $x^5 - \kappa x + 7 \leq f(x) \leq x^8 + x^5 - \kappa x + 7$ (1), θέτουμε όπου x το 0 και έχουμε $7 \leq f(0) \leq 7$. Άρα $f(0) = 0$

Θα πρέπει τώρα να βρούμε το $f'(0)$

Για $x > 0$ είναι

$$(1) \xRightarrow{\text{αφαιρούμε το 7}} x^5 - \kappa x \leq f(x) - 7 \leq x^8 + x^5 - \kappa x \xRightarrow{\text{διαφύουμε με } x > 0}$$

$$x^4 - \kappa \leq \frac{f(x) - 7}{x} \leq x^7 + x^4 - \kappa \xRightarrow{f(0)=7} x^4 - \kappa \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq x^7 + x^4 - \kappa \quad (2)$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^4 - \kappa) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^7 + x^4 - \kappa) = -\kappa$, από την (2) και σύμφωνα με το

κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\kappa$

Ομοίως έχουμε και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\kappa$ άρα $f'(0) = -\kappa$

Οπότε η ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$ θα είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 7 = -\kappa x \Rightarrow y = -\kappa x + 7$

- β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x$. Για να εφάπτεται η

ευθεία $\varepsilon: y = -\kappa x + 7$ στην C_g , στο σημείο $A(\alpha, \beta)$ θα πρέπει

$$A \in \varepsilon \Rightarrow \beta = -\kappa \alpha + 7 \quad (1)$$

$$A \in C_g \Rightarrow g(\alpha) = \beta \Rightarrow e^\alpha + 7 = \beta \quad (2)$$

$$g'(\alpha) = -\kappa \Rightarrow e^\alpha = -\kappa \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow \beta = -\kappa \alpha + 7 \xRightarrow{(1)} -\kappa \alpha = -\kappa \Rightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \alpha = 1$$

Η τιμή $\kappa = 0$ απορρίπτεται λόγω της (3)

$$\xRightarrow{(3)} \text{ Άρα } \alpha = 1 \Rightarrow \kappa = -e$$