

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $[0,1]$. Πράγματι

η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$

$$f(0) = f(1) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, θα ισχύει

για κάθε $x < x_1 \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) \stackrel{f'(x_1)=0}{\Rightarrow} f'(x) < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, x_1]$

ενώ

για κάθε $x > x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) \stackrel{f'(x_1)=0}{\Rightarrow} f'(x) > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 1]$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	0	x_1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+	
$f(x)$			0	0	

Οπότε

Οπότε

$$\text{Αν } x \in [0, x_1] \Rightarrow x \geq 0 \stackrel{f \searrow \text{ στο } [0, x_1]}{\Rightarrow} f(x) \leq f(0) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} f(x) \leq 0$$

$$\text{Αν } x \in [x_1, 1] \Rightarrow x \leq 1 \stackrel{f \nearrow \text{ στο } [x_1, 1]}{\Rightarrow} f(x) \leq f(1) \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} f(x) \leq 0$$

Άρα τελικά για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \leq 0$