

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

άρα από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$

Προφανώς το σύνολο τιμών της f είναι το $[m, M]$

Ακόμη για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} m \leq f(x) \leq M &\stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε με } x^\kappa \geq 0}{\Rightarrow} m \cdot x^\kappa \leq x^\kappa f(x) \leq M \cdot x^\kappa \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 m \cdot x^\kappa dx &\leq \int_0^1 x^\kappa f(x) dx \leq \int_0^1 M \cdot x^\kappa dx \Rightarrow m \left[\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right]_0^1 \leq \int_0^1 x^\kappa f(x) dx \leq M \left[\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right]_0^1 \Rightarrow \\ \Rightarrow m \frac{1}{\kappa+1} &\leq \int_0^1 x^\kappa f(x) dx \leq M \frac{1}{\kappa+1} \Rightarrow m \leq (\kappa+1) \cdot \int_0^1 x^\kappa f(x) dx \leq M \end{aligned}$$

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $[m, M]$, και αφού

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &\leq (\kappa+1) \cdot \int_0^1 x^\kappa f(x) dx \leq M , \text{ προκύπτει ότι ο αριθμός } (\kappa+1) \cdot \int_0^1 x^\kappa f(x) dx \\ \text{ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης άρα υπάρχει } \xi &\in [0,1] , \text{ τέτοιο ώστε ,} \\ f(\xi) &= (\kappa+1) \int_0^1 x^\kappa f(x) dx \end{aligned}$$