

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $[\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, θα ισχύει $0 < \alpha \leq f(x) \leq \beta$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f^2(x) + xf(x) - 2x^2$

Θεωρώντας την $h(x)$ σαν τριώνυμο ως προς $f(x)$ μπορούμε να την παραγοντοποιήσουμε. Είναι $\Delta = x + 8x^2 = 9x^2$ και

$$f(x)_{1,2} = \frac{-x \pm 3x}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x)_1 = x \\ f(x)_2 = -2x \end{cases}$$

$$\text{Άρα } h(x) = [f(x) - x] \cdot [f(x) + 2x]$$

Έτσι

$$h(\alpha) = [f(\alpha) - \alpha] \cdot [f(\alpha) + 2\alpha] \quad \begin{matrix} \alpha \leq f(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) - \alpha \geq 0 \\ f(\alpha) > 0 \Rightarrow f(\alpha) + 2\alpha > 0 \end{matrix} \Rightarrow h(\alpha) \geq 0$$

$$h(\beta) = [f(\beta) - \beta] \cdot [f(\beta) + 2\beta] \quad \begin{matrix} f(\beta) \leq \beta \Rightarrow f(\beta) - \beta \leq 0 \\ f(\beta) > 0 \Rightarrow f(\beta) + 2\beta > 0 \end{matrix} \Rightarrow h(\beta) \leq 0$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(\theta) = 0$

Πράγματι

Είναι $h(\alpha) \geq 0$ και $h(\beta) \leq 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) Αν $h(\alpha) = 0$ τότε $\theta = \alpha \in [\alpha, \beta]$

ii) Αν $h(\beta) = 0$ τότε $\theta = \beta \in [\alpha, \beta]$

iii) Αν $h(\alpha) \neq 0$ και $h(\beta) \neq 0$ τότε $h(\alpha) > 0$ και $h(\beta) < 0$ οπότε $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$

και επειδή η h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (\alpha, \beta)$, άρα και $\theta \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $h(\theta) = 0$

Επομένως σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$h(\theta) = 0 \Rightarrow f^2(\theta) + \theta f(\theta) = 2\theta^2$$