

α) Παρατηρούμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$, τότε

$$f'(x)g(x) = 2e^x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f'(x_0)g(x_0) = 2e^{x_0} \xrightarrow{f(x_0)=0} 2e^{x_0} = 0 \text{ άτοπο}$$

Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $f(0) = 1 > 0$ άρα η f διατηρεί θετικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) > 0$

Ομοίως παρατηρούμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $g(x_0) = 0$, τότε

$$f(x)g'(x) = -3e^x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0)g'(x_0) = -3e^{x_0} \xrightarrow{g(x_0)=0} -3e^{x_0} = 0 \text{ άτοπο}$$

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι η g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0) = -1 < 0$ άρα η g διατηρεί αρνητικό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) < 0$

β) Έχουμε

$$\left. \begin{aligned} f'(x)g(x) &= 2e^x \\ f(x)g'(x) &= -3e^x \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{προσθέτουμε κατά μέλη}} f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = -e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(x)g(x)]' = (-e^x)' \Rightarrow f(x)g(x) = -e^x + c \quad (1)$$

$$\text{Όμως } (1) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 0} f(0)g(0) = -e^0 + c \xrightarrow{f(0)=1, g(0)=-1} -1 = -1 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Οπότε } (1) \xrightarrow{c=0} f(x)g(x) = -e^x \quad (2)$$

Έτσι

$$f'(x)g(x) = 2e^x \xrightarrow{(2) \Rightarrow g(x) = \frac{-e^x}{f(x)}} f'(x) \frac{-e^x}{f(x)} = 2e^x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln|f(x)|)' = (-2x)' \Rightarrow \ln|f(x)| = -2x + c \xrightarrow{f(x)>0} \ln f(x) = -2x + c \quad (3)$$

Ακόμη

$$(3) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} \ln f(0) = -2 \cdot 0 + c \xrightarrow{f(0)=1} c = 0 \quad (4)$$

$$\text{Άρα } (3) \xrightarrow{(4)} \ln f(x) = -2x \Rightarrow f(x) = e^{-2x}$$

Τέλος

$$f'(x)g(x) = 2e^x \xrightarrow{f(x)=e^{-2x} \Rightarrow f'(x)=-2e^{-2x}} -2e^{-2x}g(x) = 2e^x \Rightarrow g(x) = -e^{3x}$$

