

α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 x f'(x) dx = 2004 & \xRightarrow{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}} \left[x f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 (x)' f(x) dx = 2004 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(x) dx = 2004 & \xRightarrow{\int_0^1 f(x) dx = f(0)} f(1) - f(0) = 2004 \quad (1) \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[0,1]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[0,1]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(\xi) = 2004$$

β) Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[0, \xi]$. Πράγματι

αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \xi]$

η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, \xi)$

και ακόμη

$$f'(0) = f'(\xi) = 2004$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \xi)$,

άρα $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$