

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\eta \mu x}{f(x)}$, $x \in [0, \pi]$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[0, \pi]$. Πράγματι

η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ ως πηλίκo συνεχών

η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, \pi)$ ως πηλίκo παραγωγισίμων με

$$h'(x) = \frac{(\eta \mu x)' f(x) - \eta \mu x f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{\sigma \upsilon \nu x f(x) - \eta \mu x f'(x)}{f^2(x)} \quad (1)$$

$$h(0) = \frac{\eta \mu 0}{f(0)} = 0$$

$$h(\pi) = \frac{\eta \mu \pi}{f(\pi)} = 0$$

$$\text{Άρα } h(0) = h(\pi) = 0$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$h'(c) = 0 \Rightarrow \frac{\overset{(1)}{\sigma \upsilon \nu c f(c)} - \eta \mu c f'(c)}{f^2(c)} = 0 \Rightarrow \sigma \upsilon \nu c f(c) - \eta \mu c f'(c) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta \mu c f'(c) = \sigma \upsilon \nu c f(c) \Rightarrow \frac{f'(c)}{f(c)} = \sigma \phi c$$