

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{f(x)}{e^{F(x)}} = f(x)e^{-F(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)e^{-F(x)} + f(x)(e^{-F(x)})' \stackrel{f'(x)=f''(x)}{=} \\ &= f''(x)e^{-F(x)} + f(x)e^{-F(x)}(-F'(x)) = \\ &= f''(x)e^{-F(x)} - f''(x)e^{-F(x)} = 0 \end{aligned}$$

Άρα, σύμφωνα με γνωστή πρόταση θα είναι $h(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Όμως } h(0) = f(0)e^{-F(0)} \stackrel{\substack{f(0)=1 \\ F(0)=0}}{=} 1$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι

$$h(x) = 1 \Rightarrow f(x)e^{-F(x)} = 1$$