

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$, (είναι $x \neq 0$ διότι $\alpha > 0$)

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την h στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Πράγματι

η h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών

η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) ως πηλίκο παραγωγισίμων

$$\text{με } h'(x) = \left[\frac{f(x)}{x} \right]' \Rightarrow h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad (1)$$

$$h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

$$h(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta}$$

$$\text{Όμως } \alpha f(\beta) = \beta f(\alpha) \stackrel{\alpha, \beta \neq 0}{\Rightarrow} \frac{f(\beta)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)}{\beta} \Rightarrow h(\alpha) = h(\beta)$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Rightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$\stackrel{x_0 \neq 0}{\Rightarrow} f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

Έστω τώρα, ότι υπάρχει $x_1 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 \neq x_0$, έστω $x_0 < x_1$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} \quad (2)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$

η φ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0, x_1]$ ως πράξεις συνεχών

η φ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_0, x_1) ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$\varphi'(x) = [xf'(x) - f(x)]' \Rightarrow \varphi'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = xf''(x) \quad (3)$$

$$\varphi(x_0) = x_0 f'(x_0) - f(x_0) \stackrel{f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} \Rightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0)}{=} f(x_0) - f(x_0) = 0$$

$$\varphi(x_1) = x_1 f'(x_1) - f(x_1) \stackrel{(2) \Rightarrow x_1 f'(x_1) = f(x_1)}{=} f(x_1) - f(x_1) = 0$$

$$\text{Άρα } \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_0, x_1)$,

$$\text{άρα } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } \varphi'(\xi) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \xi f''(\xi) = 0 \stackrel{\xi \neq 0}{\Rightarrow} f''(\xi) = 0 \quad \underline{\text{άτοπο}} \text{ διότι } f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

$$\text{Άρα δεν υπάρχει } x_1 \in [\alpha, \beta] \text{ με } x_1 \neq x_0 \text{ και } f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} \text{ και}$$

άρα το x_0 είναι μοναδικό

β) Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Άρα $\alpha < x < \beta$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, x]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[\alpha, x]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, x)

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, x)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad (4)$$

Επίσης

εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[x, \beta]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[x, \beta]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο (x, β)

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, \beta)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \quad (5)$$

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$,

η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$

Ακόμη $\alpha < \xi_1 < x < \xi_2 < \beta$. Άρα $\xi_1 < \xi_2$

Οπότε

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \stackrel{(4), (5)}{\Rightarrow} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}, \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$