

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[0,1]$. Πράγματι

η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \stackrel{f(1)=f(0)+\kappa}{\Rightarrow} f'(x_1) = \frac{f(0) + \kappa - f(0)}{1} \Rightarrow f'(x_1) = \kappa$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f' στα διαστήματα $[0, x_1]$ και $[x_1, 1]$.

Πράγματι

η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x_1]$

η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x_1)$

$$f'(0) = f'(x_1) = \kappa$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (0, x_1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$

Ομοίως

η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, 1]$

η f' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x_1, 1)$

$$f'(x_1) = f'(1) = \kappa$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = 0$

Τέλος εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την f'' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$.

η f'' είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$

η f'' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (ξ_1, ξ_2)

$$f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$,

άρα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'''(x_0) = 0$