

α) Εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle για την g στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Πράγματι

η g είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις συνεχών

η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$g(\alpha) = 2 + F(\alpha) \stackrel{F(\alpha)=0}{=} 2 + 0 = 2$$

$$g(\beta) = 2 + F(\beta) \stackrel{\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=0 \Rightarrow F(\beta)-F(\alpha)=0 \Rightarrow F(\beta)=0}{=} 2 + 0 = 2$$

$$\text{Άρα } g(\alpha) = g(\beta) = 2$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle,

οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'

β) Έχουμε

$$g(x) = 2 + \frac{F(x)}{x} \Rightarrow xg(x) = 2x + F(x) \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow g(x) + xg'(x) = 2 + f(x) \stackrel{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } x_0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow g(x_0) + x_0g'(x_0) = 2 + f(x_0) \stackrel{g'(x_0)=0}{\Rightarrow} g(x_0) = 2 + f(x_0)$$