35.38

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ το πολυώνυμο $P(x)$ θα είναι του ίδιου βαθμού με τον βαθμό του αριθμητή της f. Άρα το $P(x)$ θα είναι <u>2ου βαθμού</u>

Έστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{x^2+\lambda x-3}{P(x)}=1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{x^2+\lambda x-3}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{x^2}{\alpha x^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha}=1 \Rightarrow \alpha=1$$

Επειδή οι ευθείες $x=1$ και $x=-2$, είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες , σύμφωνα με γνωστή πρόταση θα ισχύει

$$\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty \text{ ή } -\infty \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to -2} f(x)=+\infty \text{ ή } -\infty \quad (2)$$

Οπότε

$$(1) \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-3}{P(x)}=+\infty \text{ ή } -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-3}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=+\infty \text{ ή } -\infty \overset{\alpha=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2+\lambda x-3}{x^2+\beta x+\gamma}=+\infty \text{ ή } -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1}\left[x^2+\beta x+\gamma\right]=0 \Rightarrow 1+\beta+\gamma=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta+\gamma=-1 \quad (3)$$

και

$$(2) \Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^2+\lambda x-3}{P(x)}=+\infty \text{ ή } -\infty \Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^2+\lambda x-3}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=+\infty \text{ ή } -\infty \overset{\alpha=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^2+\lambda x-3}{x^2+\beta x+\gamma}=+\infty \text{ ή } -\infty \Rightarrow \lim_{x\to -2}\left[x^2+\beta x+\gamma\right]=0 \Rightarrow 4-2\beta+\gamma=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\beta-\gamma=4 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) βρίσκουμε $\beta=1$ και $\gamma=-2$

Οπότε τελικά $P(x)=x^2+x-2$

και άρα $f(x)=\dfrac{x^2+\lambda x-3}{x^2+x-2}$

Ακόμη

Η f είναι ρητή συνάρτηση και άρα είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+\lambda x-3\right)'\left(x^2+x-2\right)-\left(x^2+\lambda x-3\right)\left(x^2+x-2\right)'}{\left(x^2+x-2\right)^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{(2x+\lambda)\left(x^2+x-2\right)-\left(x^2+\lambda x-3\right)(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2} \quad (5)$$

και επειδή παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=-1$ σύμφωνα με το <u>θεώρημα Fermat</u> θα ισχύει

$$f'(-1)=0\overset{(5)}{\Rightarrow}\frac{(-2+\lambda)(1-1-2)-(1-\lambda-3)(-2+1)}{(1-1-2)^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-2)(-2+\lambda)+(-\lambda-2)=0\Rightarrow\ \lambda=\frac{2}{3}$$