

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH} \frac{F'(x)}{(x)'} \stackrel{F'(x)=f(x)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } 0}{=} f(0) = \boxed{g(0)} \end{aligned}$$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων.

Μένει να αποδείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ θα είναι $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ (1)

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{F(x)}{x} - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{F(x)}{x} - f(0)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - xf(0)}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH} \frac{(F(x) - xf(0))'}{(x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} f'(0) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$