35.34

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{\alpha x^3}{3}-\frac{\beta x^2}{2}-\gamma x$, $x\in[0,1]$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, σύμφωνα με γνωστή πρόταση ορίζεται η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$, η οποία είναι και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$

Οπότε εφαρμόζουμε <u>θεώρημα Rolle</u> για την h στο διάστημα $[0,1]$. Πράγματι

η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών
η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως διαφορά παραγωγισίμων με

$$h'(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'-\left(\frac{\alpha x^3}{3}\right)'-\left(\frac{\beta x^2}{2}\right)'-(\gamma x)'\Rightarrow h'(x)=f(x)-\alpha x^2-\beta x-\gamma \quad (1)$$

$$h(0)=\int_0^0 f(t)dt--\frac{\alpha\cdot 0^3}{3}-\frac{\beta\cdot 0^2}{2}-\gamma\cdot 0=0$$

$$h(1)=\int_0^1 f(t)dt-\frac{\alpha\cdot 1^3}{3}-\frac{\beta\cdot 1^2}{2}-\gamma\cdot 1=\int_0^1 f(t)dt-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}-\gamma=$$
$$=\frac{6\int_0^1 f(t)dt-2\alpha-3\beta-6\gamma}{6}\overset{6\int_0^1 f(x)dx=2\alpha+3\beta+6\gamma}{=}0$$

Άρα $h(0)=h(1)=0$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του <u>θεωρήματος Rolle</u> οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_o)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}f(x_o)-\alpha x_o^2-\beta x_o-\gamma-\Rightarrow f(x_o)=\alpha x_o^2+\beta x_o+\gamma$$